11-й класс

1. Можно ли найти натуральные числа $n_1, n_2, \ldots, n_{2012}$, среди которых нет двух одинаковых, так, чтобы выполнялось равенство

$$\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\cdots+\frac{1}{n_{2012}}=1?$$

2. Существует ли четырёхугольная пирамида, у которой две противоположные боковые грани перпендикулярны основанию?

3. Какое из двух чисел больше: $2011^{2010\cdot 2012}$ или 2010^{2011^2}?

4. В прямоугольном треугольнике из вершины прямого угла на гипотенузу опустили высоту, которая поделила исходный треугольник на два меньших прямоугольных треугольника. Доказать, что:
   - из радиусов трёх окружностей, вписанных в эти прямоугольные треугольники, как из отрезков можно составить новый треугольник;
   - новый треугольник будет прямоугольным;
   - новый треугольник будет подобным исходному.

5. Положительные числа x, y, z обладают тем свойством, что

$$\operatorname{arctg} x+\operatorname{arctg} y+\operatorname{arctg} z<\pi.$$

   Доказать, что сумма этих чисел больше их произведения.

6. 2013 цифр выписаны по кругу. Известно, что если читать эти цифры по часовой стрелке, начиная с некоторого определённого места, то полученное 2013-значное число (в широком смысле — несколько первых цифр могут быть и нулями) делится на 27. Доказать, что если начать читать по часовой стрелке с любого другого места, то полученное число также будет делиться на 27.